

تمرینات سری سوم نظریه گراف (فصل چهارم: مسیرها و فواصل در گرافها)

مهلت تحویل: ۸۷/۸/۲۶

۱. تابع فاصله در کدام دسته از گرافهای زیر متر است؟ (اثبات یا ارائه مثال نقض)
  ۱. گرافهای جهت دار
  ۲. گرافهای متقارن
  ۳. گرافهای همبند قوی
۲. ثابت کنید مرکز هر درخت با  $K_1$  یا  $K_2$  یکریخت است.
۳. نشان دهید هر گراف وزن دار  $H$ ، مرکز گراف وزن داری مانند  $G$  است.
۴. گراف  $G$  خودمرکز است، اگر  $G = C(G)$ .
  ۱. تمام درختهای خودمرکز را مشخص کنید.
  ۲. نشان دهید گراف همبند خودمرکز، راس برشی ندارد.
۵. محیط گراف همبند  $G$  عبارت است از زیرگرافی القایی از  $G$  توسط راسهایی مانند  $v$  از  $G$  با شرط  $e(v) = \text{diam}G$ . نشان دهید اگر  $H$  یک گراف غیر کامل از مرتبه  $p$  باشد، آن گاه  $H$  محیط گراف دیگری مانند  $G$  است اگر و تنها اگر:
$$\Delta(H) \leq p - 2$$
۶. نشان دهید اگر  $T$  درختی از مرتبه  $p \geq 3$  و  $T'$  درختی باشد که با حذف راسهای انتهایی  $T$  از آن به دست آید، آن گاه  $C(T) = C(T')$ .
۷. نشان دهید اگر  $uv \in E(G)$  باشد، آن گاه  $|e(u) - e(v)| \leq 1$  است.
۸. نشان دهید اگر  $G$  گرافی همبند با شعاع  $m$  و قطر  $n$  باشد و  $k$  یک مقدار صحیح باشد که  $m < k < n$ ، آن گاه راسی مانند  $w$  وجود دارد به صورتی که  $e(w) = k$ .
۹. ادعاهای زیر درست اند یا نادرست؟ (اثبات یا ارائه مثال نقض)

۱. اگر تمام کمان‌ها در یک گراف وزن‌های متفاوتی داشته باشد، آن‌گاه کوتاه‌ترین مسیر میان هر دو نود یکتاست.
۲. در یک گراف جهت‌دار با وزن‌های مثبت، اگر از جهت کمان‌ها صرف‌نظر شود (گراف بدون جهت در نظر گرفته شود) کوتاه‌ترین مسیرها تغییر نمی‌کنند.
۳. اگر وزن هر کمان در گراف  $k$  واحد افزایش (کاهش) یابد، آن‌گاه اندازه کوتاه‌ترین مسیرها به اندازه مضربی از  $k$  افزایش (کاهش) می‌یابد.
۴. الگوریتم دایجکسترا کوتاه‌ترین مسیر با کم‌ترین تعداد کمان را می‌یابد.
۱۰. اگر  $G$  یک گراف ناهمبند باشد، نشان دهید که  $diam \bar{G} \leq 2$ .

*A journey of a thousand miles starts with a single step and if that step is the right step, it becomes the last step!*

- Lao Tzu

موفق باشید