

تمرینات سری اول نظریه گراف (فصل اول: مقدمه‌ای بر نظریه گراف)

مهلت تحویل: ۸۷/۷/۱۴

۱. اگر گراف G یک راس مانند v داشته باشد که با راسی از مولفه همبندی G_1 از G مجاور باشد، آن‌گاه v نیز راسی از G_1 است.
۲. اگر G یک گراف همبند باشد و $k \geq 2$ طول طولانی‌ترین مسیر در G باشد، آن‌گاه هر دو مسیر در G با طول k ، حداقل یک راس مشترک دارند.
۳. یک گراف غیربدیهی، حداقل دو راس غیربرشی دارد.
۴. برای گراف G با n راس و m یال و k مولفه همبندی، Rank گراف G به صورت $\rho(G) = n - k$ و Nullity گراف G به صورت $\mu(G) = m - n + k$ تعریف می‌شود. بدیهی است که $\rho(G) \geq 0$ و $\rho(G) + \mu(G) = m$. ثابت کنید $\rho(G) \leq m$ و در نتیجه $\mu(G) \geq 0$.
۵. فرض کنید G گرافی از مرتبه $p \geq 2$ باشد و فرض کنید که کم‌ترین درجه‌اش $\delta(G)$ در رابطه $\delta(G) \geq \frac{p-1}{2}$ صدق کند. ثابت کنید G همبند است. همچنین نشان دهید برای هر عدد صحیح زوج $p \geq 2$ یک گراف ناهمبند از مرتبه p با کم‌ترین درجه $\frac{p-2}{2}$ وجود دارد.
۶. نشان دهید که گراف G مسیری به طول $\delta(G)$ دارد و اگر $\delta(G) \geq 2$ شامل دوری به طول حداقل $\delta(G) + 1$ است.
- (راهنمایی: فرض کنید P بزرگ‌ترین مسیر در G باشد. فرض کنید P یک $u-v$ مسیر است. حال رئوسی را که می‌توانند با u و v مجاور باشند را در نظر بگیرید.)
۷. نشان دهید که اگر G یک گراف همبند r -منظم باشد که r زوج است، آن‌گاه G هیچ پلی ندارد.
۸. فرض کنید G گرافی باشد که هر یال آن یک راس با درجه زوج و یک راس با درجه فرد را به هم متصل می‌کند. ثابت کنید G دوبخشی است.

۹. نشان دهید که در گراف G ، اشتراک هر دور با هر برش، تعداد زوجی یال (ممکن است صفر باشد) است.

۱۰. در گراف غیرجهتدار $G = (N, A)$ ، فرض کنید $N_1 \subseteq N$ باشد. گفته می‌شود که N_1 Independent است، هرگاه هیچ دو راسی از N_1 با هم مجاور نباشند. همچنین گفته می‌شود که N_1 clique است، هرگاه هر جفت از راس‌ها در N_1 با هم مجاور باشند. نشان دهید که N_1 در G ، clique است اگر و فقط اگر N_1 در G^c ، Independent باشد. (G^c مکمل G است).

تمریناتی از کتاب درسی برای تمرین بیشتر:

p.11 1, 6, 10

p.14 2, 5

p.25 6, 8, 9

p.29 5, 6, 8, 9, 10

p.32 4, 5, 6, 7, 8

p.40 2, 3

اگر واقعیت با تئوری جور در نمی‌آید، واقعیت را تغییر بده! "آلبرت اینشتین"

موفق باشید