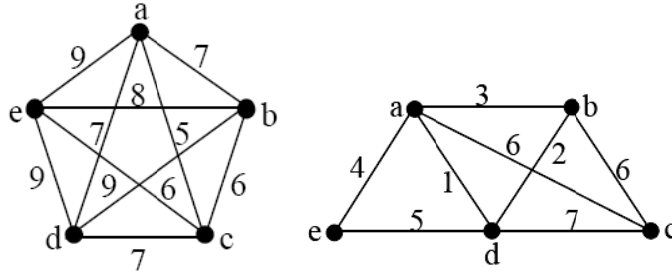


## تمرینات سری دوم نظریه گراف (فصل سوم: درخت‌ها)

مهلت تحویل: ۸۷/۸/۵

۱. ثابت کنید هر درخت با حداقل دو راس، یک گراف دوبخشی است.
۲. تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف‌های زیر را بیابید:  
(۱)  $K_n - e$  که در آن  $e$  یک کمان دلخواه از  $K_n$  است.  
(۲)  $K_{2,n}$
۳. فرض کنید  $T$  درختی از مرتبه  $n$  باشد. نشان دهید  $T$  با زیرگرافی از  $\bar{C}_{n+2}$  (مکمل دور  $C_{n+2}$ ) یکرخت است.
۴. اثبات کنید اگر  $G$  گرافی همبند از مرتبه  $q$  با این خاصیت باشد که هر زیرگراف از اندازه  $p-1$  یک زیردرخت فراگیر است، آن‌گاه  $G$  یک درخت یا یک دور است.
۵. اثبات یا رد کنید:  
(۱) اگر  $G$  گرافی همبند برچسب دار شده باشد که در آن هر دو درخت فراگیر یکرخت هستند، آن‌گاه  $G$  یک درخت یا یک دور است.  
(۲) در یک درخت با مرتبه  $p \geq 3$  تعداد رئوس برشی بیش‌تر از تعداد پل‌هاست.  
(۳) اگر  $G$  گرافی باشد که در آن  $p = q + 1$ ، آن‌گاه  $G$  یک درخت است.  
(۴) اگر  $G$  گرافی با این خصوصیت باشد که بین هر دو راس  $u$  و  $v$  در  $G$ ، مسیر منحصر به فرد وجود داشته باشد، آن‌گاه  $G$  یک درخت است.
۶. فرض کنید  $T$  یک درخت با  $p \geq 3$  راس و  $k$  برگ باشد. تعداد راس‌های برشی و پل‌های  $G$  را به دست آورید.
۷. فرض کنید  $G$  یک گراف همبند وزن‌دار باشد که یال‌هایش وزن‌های متفاوتی دارند. نشان دهید کوچک‌ترین درخت فراگیر  $G$  منحصر به فرد است.
۸. نشان دهید که برای هر عدد صحیح  $n \geq 2$  یک گراف وزن‌دار همبند که دقیقاً  $n$  کوچک‌ترین درخت فراگیر دارد، وجود دارد.

۹. برای گراف‌های وزن‌دار داده شده، کوچک‌ترین درخت فراگیر بیابید.



۱۰. فرض کنید  $Q$  یک برش و  $T$  یک درخت فراگیر از گراف همبند  $G$  باشند. نشان

دهید که  $T \cap Q$  غیرتهی است.

۱۱. فرض کنید  $d_{\max}$  نشان دهنده بیش‌ترین درجه راس‌ها در درخت  $T$  باشد. نشان

دهید  $T$  حداقل  $d_{\max}$  برگ دارد.

تمریناتی از کتاب درسی برای تمرین بیش‌تر:

p.95 2, 5, 6, 7, 9, 15, 19

p.121 1

p.135 4, 6

یک همیشه به یاد داشته باش تا به فراموشی بسیاری آنچه را که اندوهگینت می‌سازد

اما... هرگز فراموش مکن به یاد داشته باشی آنچه را که شادمانت می‌سازد.

موفق باشید